Grado M+I
Curso 2015-2016

Cálculo I

Matemática Aplicada
ETSIINF-UPM

Primer Parcial - Solución

27 de octubre de 2014

Parte 1. Teoría (2.5 puntos)

Ejercicio 1. *(2.5 puntos)*

1. *(1.5 puntos)* Enuncia y demuestra el "criterio del sandwich".
2. *(1 punto)* Aplica el criterio anterior para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+1}} + \frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+2}} + \cdots + \frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+3n}}$$

Solución

Puesto que:

1. El número de sumandos es $3n$
2. El mayor sumando es $\dfrac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+1}}$
3. El menor sumando es $\dfrac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+3n}}$,

Se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$3n\frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+3n}} \leq \frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+1}} + \frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+2}} + \cdots + \frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+3n}} \leq 3n\frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+1}}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} 3n\frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+1}} = \frac{9}{\sqrt{2}} \qquad \lim_{n\to\infty} 3n\frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+1}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

podemos aplicar el criterio del sandwich y tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+1}} + \frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+2}} + \cdots + \frac{3n^2+5}{\sqrt{2n^6+3n}} = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Parte 2. Cuestiones (2 puntos)

Ejercicio 2. Decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta si es verdadera o busca un contraejemplo si no lo es.

1. (*0.5 puntos*) Sea el conjunto $A = \{2, 5, 8, \ldots, 299\}$, entonces el conjunto A se puede escribir como $A = \{3x - 1 \mid 1 \leq x \leq 100\}$ ☐ Si ☒ No

   Solución

   Por ejemplo para $x = 4/3$ se tiene que $3x - 1 = 4 \in \{3x - 1 \mid 1 \leq x \leq 100\}$ pero $4 \notin A = \{2, 5, 8, \ldots, 299\}$.

   Sería correcto si $A = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ 1 \leq n \leq 100\}$

2. (*0.5 puntos*) Para todo conjunto $A \subset \mathbb{Q}$ acotado superiormente y no vacío, se tiene que existe $\alpha = \sup A \in \mathbb{Q}$. $\square$ Si $\boxed{X}$ No

Solución

Basta elegir el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x^2 < 2\}$ y este conjunto en $\mathbb{Q}$ está acotado, inferiormente por 0 y acotado superiormente por 2 y sin embargo su supremo es $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

3. (*0.5 puntos*) Sea la sucesión de intervalos $I_n = [1 + \frac{1}{2^n}, 2 + \frac{4^n}{3^n}]$, entonces se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [1, 2]$. $\square$ Si $\boxed{X}$ No

Solución

Por ejemplo $1 \notin I_1 = [1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{4}{3}]$, con lo cual $1 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Por otra parte, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [\frac{3}{2}, \frac{10}{3}]$

4. (*0.5 puntos*) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $4 \leq b_n \leq 6$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. $\boxed{X}$ Si $\square$ No

Solución

Puesto que $4 \leq b_n \leq 6$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada. Por lo tanto como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ (resultado de teoría).

Parte 3. problemas (5.5 puntos)

Ejercicio 3. *(2 puntos)*

1. Calcula el conjunto de números reales que verifican la siguiente desigualdad

$$|x(x-5)| \leq |x|$$

Solución

Claramente $x = 0$ verifica la desigualdad.

Si $x \neq 0$, podemos simplificar por $|x|$ y tenemos que

$$|x(x-5)| \leq |x| \Longrightarrow |x-5| \leq 1$$

Como

$$|x-5| \leq 1 \Longleftrightarrow 4 \leq x \leq 6$$

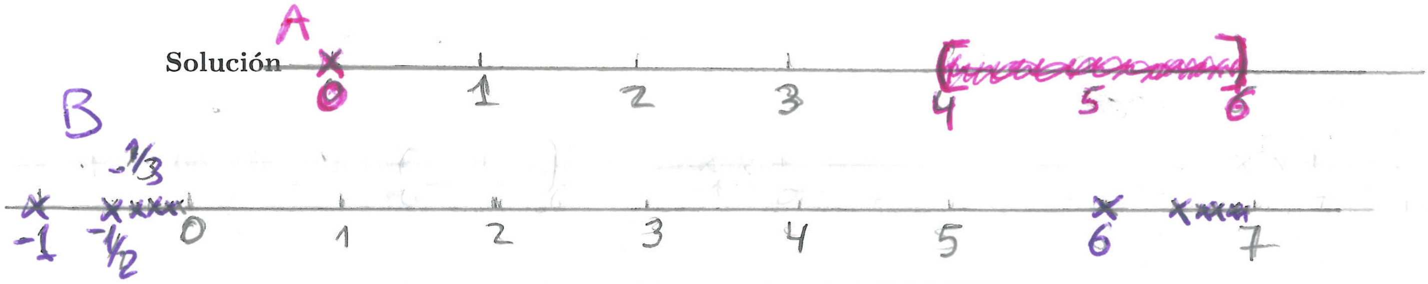
Obtenemos que el conjunto $A = \{0\} \cup [4, 6]$.

2. Representa los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x(x-5)| \leq |x|\} \quad B = \{7 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\frac{-1}{n} : n \in \mathbb{N}\},$$

y estudia si están acotados inferior o superiormente, encuentra cotas y el supremo y el ínfimo, en el caso de que existan, completando el cuadro siguiente.

Solución

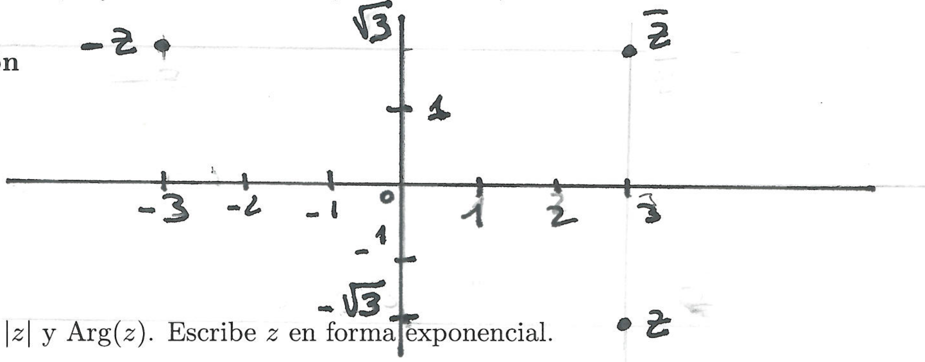


	cota sup	cota inf	Máx	mín	Sup	Inf
A	7	-1	6	0	6	0
B	9	-2	No hay	-1	7	-1

Ejercicio 4. *(1 punto)* Dado el número complejo $z = 3 - \sqrt{3}\, i$, se pide:

1. Representa z, $\overline{z}$ y $-z$. $z = 3 - \sqrt{3}\, i, \overline{z} = 3 - \sqrt{3}\, i, -z = -3 + \sqrt{3}\, i$

   Solución



2. Calcula $|z|$ y $\text{Arg}(z)$. Escribe z en forma exponencial.

   Solución

   $|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$

   $Arg(z) = \theta$ tal que $\cos(\theta) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$

   Luego $\theta = -\frac{\pi}{6}$ o $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

   Forma exponencial: $2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$ o $2\sqrt{3}e^{\frac{11\pi}{6}i}$

3. Calcula:

   3.1. $z + (2 - 3i) = 5 - (3 + \sqrt{3})\, i$

   3.2. $z(2 - 3i) = 6 + 3\sqrt{3} - (9 + 2\sqrt{3}\,)i$

3.3. $\dfrac{z}{2-3i} = \dfrac{(3-\sqrt{3}\,i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{6+3\sqrt{3}}{13} + \dfrac{9-2\sqrt{3}\,i}{13}$

3.4. $z^{10} = (2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i})^{10} = 2^{10}3^5 e^{-\frac{5\pi}{3}i}$

Ejercicio 5. (1 punto) Calcula los siguientes límites:

Solución

1. Indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3+2n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3+2n})(\sqrt{n^3+n} + \sqrt{n^3+2n})}{\sqrt{n^3+n} + \sqrt{n^3+2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n^3+n} + \sqrt{n^3+2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{n^3+n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^3+2n}{n^2}}} = 0.$$

2. Indeterminación del tipo 1^∞.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+3n^2+8}{n^3+2n+7}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n^3+3n^2+8}{n^3+2n+7} - 1\right)} =$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-2n^2+n}{n^3+2n+7}\right)} = e^3.$$

Ejercicio 6. (1.5 puntos) Estudia la convergencia de la sucesión recurrente

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15} \end{cases}$$

Solución

Se trata de una sucesión recurrente. Por lo tanto, primero buscamos un posible límite. De existir límite L se tiene que pasando al límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n+15} = \sqrt{2\lim_{n\to\infty} a_n + 15} = \sqrt{2L+5}$$

Luego L tiene que ser solución de $L = \sqrt{2L+5}$. Como $L^2 - 2L - 15 = 0 \iff L = 5, \text{o } L = -2$. Como $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, descartamos -2 y la única solución posible de $L = \sqrt{2L+5}$ para ser el límite será $L = 5$.

• Por tanto, si existe límite de la sucesión, dicho límite es 5.

Probaremos ahora que la sucesión <u>tiene</u> límite probando que es monótona y acotada.

1. Probaremos que $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ es monótona creciente por inducción, es decir, hay que probar que

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}\,.$$

1.1. para $n = 1$ es cierto, puesto que $1 = a_1 \leq \sqrt{17} = a_2$.

1.2. Suponiendo que es cierto para n que $a_n \leq a_{n+1}$ probaremos que

$$a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Es decir,

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15} \leq \sqrt{2a_{n+1} + 15} = a_{n+2}.$$

Como $a_n \leq a_{n+1}$ se tiene que $2a_n + 15 \leq 2a_{n+1} + 15$ y por lo tanto, $\sqrt{2a_n + 15} \leq \sqrt{2a_{n+1} + 15}$.

Luego $a_{n+1} \leq a_{n+2}$.

- Aplicando el principio de Inducción se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Probaremos que está acotada superiormente por 5, es decir, que

$$a_n \leq 5 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

2.1. Para $n = 1$ es cierto puesto que $a_1 = 1 \leq 5$.

2.2. Suponemos que $a_n \leq 5$ y hay que probar que $a_{n+1} \leq 5$, es decir, que $\sqrt{2a_n + 15} \leq 5$. Como $a_n \leq 5$ se tiene que $2a_n \leq 10$ luego $\sqrt{2a_n + 15} \leq \sqrt{25} = 5$. Luego $a_{n+1} \leq 5$.

- Aplicando el principio de Inducción $a_n \leq 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Conclusión: Como la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada se tiene que es convergente y su límite es 5.